Método Axiomático e Teorias Formais

#11

Verdade de Tarski – Parte 2

Relembrando

No vídeo passado, vimos o conceito de satisfatibilidade e nossas primeiras ideias do conceito de verdade de Tarski.

Intuitivamente, uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem é *satisfatível* quando existem uma interpretação dessa linguagem (que nos dá o significado dos termos primitivos e um domínio de interpretação – esta linguagem está falando sobre o quê?) e uma valoração (que atribui valores do domínio aos termos da fórmula) tal que, mediante esta interpretação e valoração, a fórmula da linguagem se torna uma sentença *verdadeira* sobre elementos do domínio de interpretação.

Verdade

Definição 1 – Uma fbf A é verdadeira em uma interpretação I se e somente se toda valoração em I satisfaz A.

Notação: $\models_I A$

Por outro lado, A é falsa em I se e somente se não existe valoração em I que satisfaz A.

Modelo

Definição 2 – Uma interpretação I é dita ser um modelo de um conjunto de fórmulas Γ se e somente se toda fórmula desse conjunto é verdadeira em I.

Definição 3 – Um modelo de uma teoria de primeira ordem $\mathbb{K}$ é uma interpretação I para a linguagem $\mathcal{L}$ de $\mathbb{K}$ na qual todos os axiomas de $\mathbb{K}$ são verdadeiros em I.

Algumas observações

1 – Não é possível que uma fórmula α de uma linguagem de primeira ordem seja, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa em uma dada interpretação I.

2 – Mas é possível que uma dada fórmula β seja verdadeira em uma interpretação I e falsa em uma outra interpretação J.

Por exemplo, um dado axioma próprio de uma teoria formal pode ser verdadeiro em uma interpretação, mas falso em outra interpretação (como já vimos em vídeos anteriores quando falamos sobre independência de axiomas).

Alguns resultados

1 – As regras de inferência de uma teoria formal, que são as regras Modus Ponens e a Regra de Generalização preservam a verdade.

a) Se A e $(A \rightarrow B)$ são verdadeiras em uma dada interpretação I, então B também é verdadeira em I.

b) A é verdadeira em uma interpretação I se, e somente se, $(\forall x_i)A$ é verdadeira em I, em que x_i é uma variável qualquer.

Alguns resultados

2 – Se I é um modelo de uma teoria de primeira ordem $\mathbb{K}$, então todos os teoremas de $\mathbb{K}$ são verdadeiros em I.

Esses resultados justificam nossas afirmações em vídeos anteriores sobre independência de axiomas próprios.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br